Teknik Membuktikan Pertidaksamaan

Romano Emmanuelle

24 April 2020
Revisi ke-3

Pada kesempatan kali ini, saya akan membagikan pengetahuan yang saya dapatkan ketika sedang belajar pembuktian pertidaksamaan:

Untuk membuktikan $A \geq B$, kita dapat membuktikan $A - B \geq 0$

Di bawah ini merupakan contoh soal yang dapat membantu Anda untuk memahami ide ini!

Untuk setiap bilangan riil a, b, terdapat bilangan riil n yang memenuhi $1 > 2a + bn$. Buktikan bahwa

$$(a + 2bn)^2 \geq 5bn + 4a - 2.$$

Romano Emmanuelle

Tulis ulang pertidaksamaan sebagai berikut :

$$1 - 2a - bn + a^2 + 4b^2n^2 + 1 + 4abn - 2a - 4bn \geq 0$$

atau

$$(1 - (2a + bn)) + (a + 2bn - 1)^2 \geq 0.$$

Perhatikan bahwa $(1 - (2a + bn))$ tidak akan bernilai negatif karena $1 > 2a + bn$, dan bilangan kuadrat tidak akan pernah bernilai negatif. Akhirnya, pertidaksamaan telah terbukti.

Terdapat salah satu cara lagi yang memiliki ide serupa :

Jika $B > 0$, untuk membuktikan $A \geq B$, kita dapat menunjukkan $\frac{A}{B} \geq 1$

Agar dapat lebih memahami, perhatikanlah contoh di bawah ini!

Misalkan a, b, c merupakan bilangan riil positif, buktikan :

$$\frac{a^2 + bc}{b + c} + \frac{b^2 + ca}{c + a} + \frac{c^2 + ab}{a + b} \geq a + b + c.$$

Dengan mengurangkan ruas kiri dengan ruas kanan, kita memiliki

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^2+bc}{b+c} - a + \frac{b^2+ca}{c+a} - b + \frac{c^2+ab}{a+b} - c \\
&= \frac{a^2+bc-ab-ac}{b+c} + \frac{b^2+ca-bc-ba}{c+a} + \frac{c^2+ab-ca-cb}{a+b} \\
&= \frac{(a-b)(a-c)}{b+c} + \frac{(b-c)(c-a)}{c+a} + \frac{(c-a)(c-b)}{a+b} \\
&= \frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)+(b^2-c^2)(b^2-a^2)+(c^2-a^2)(c^2-b^2)}{(b+c)(c+a)(a+b)} \\
&= \frac{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}{(b+c)(c+a)(a+b)} \\
&= \frac{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2}{2(b+c)(c+a)(a+b)} \geq 0
\end{aligned}$$

akhirnya kita selesai.

Kita diharapkan untuk mahir melakukan manipulasi aljabar agar dapat dengan mudah melakukan pembuktian dengan gaya ini.Tak jarang kita menemukan kesulitan saat akan membuktikan $A \geq B$ secara langsung. Kita dapat mengambil "jembatan" dengan membuktikan $A \geq C$. Jika kita dapat membuktikan $C \geq B$, maka $A \geq B$ akan langsung terjadi.

Agar dapat lebih memahami, perhatikanlah contoh di bawah ini!

Misalkan $a_i \geq 1 (i = 1, 2, ..., n)$. Buktikan bahwa

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq \frac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

Yong Su, Bin Xiong

Perhatikan bahwa :

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\cdot+(1+a_n) = 2^n \left(1+\frac{a_1-1}{2}\right)\left(1+\frac{a_2-1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n-1}{2}\right)$$

Telah diberikan $a_i - 1 \geq 0$, kita punya :

$$\begin{aligned}(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) &\geq 2^n\left(1+\frac{a_1-1}{2}+\frac{a_2-1}{2}+\cdots+\frac{a_n-1}{2}\right)\\ &\geq 2^n\left(1+\frac{a_1-1}{n+1}+\frac{a_2-1}{n+1}+\cdots+\frac{a_n-1}{n+1}\right)\\ &= \frac{2^n}{n+1}[n+1+(a_1-1)+(a_2-1)+\cdot\cdot+(a_n-1)]\end{aligned}$$

Sesuai yang diharapkan.

Jangan pernah takut untuk menebak jawabannya dan mencoba-coba, terkadang ini akan sangat membantu. Agar lebih jelas, perhatikan contoh di bawah ini!

Misalkan a, b, c adalah bilangan riil positif yang memenuhi persamaan $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Carilah nilai minimum dari

$$S = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}$$

Terlihat $S = 3$ ketika $a = b = c$, akan dibuktikan $S \geq 3$:

$$\begin{aligned}S-3 &= \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-3-\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}\\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2}-3-2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)\\ &= a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 \geq 0\end{aligned}$$

Akhirnya, terlihat bahwa 3 adalah nilai minimum dari S

Latihan Mandiri[1]

1. untuk setiap bilangan riil u, v, w yang memenuhi $uv + vw + wu = 1$, tunjukkan bahwa
$$u^2 + 5v^2 + 8w^2 \geq 4$$

2. Misalkan x, y, z merupakan bilangan riil positif. Jika
$$(x^2 + y^2 + z^2)[(x^2 + y^2 + z^2)^2 - (xy + yz + zx)^2] = A$$
$$(x + y + z)^2[(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + zx)]^2 = B,$$
buktikan bahwa $A \geq B$

3. misalkan a, b, c bilangan riil positif. Buktikan bahwa
$$a + b + c - 3abc \geq a + b - 2\sqrt{2ab}$$

4. Misalkan m dan n adalah bilangan bulat positif dengan $m > n$, buktikan bahwa
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$
.

5. Misalkan n bilngan asli. Buktikan bahwa
$$\frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) \geq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

6. Misalkan a, b, c bilangan riil positif, tunjukkan bahwa
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3}$$

7. Untuk setiap bilangan riil p, q, r, buktikan bahwa
$$(xy + yz + zx)\left[\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right] \geq \frac{9}{4}$$

8. Misalkan a, b, c merupakan bilangan riil non-negatif, buktikan bahwa
$$a(b + c - a)^2 + b(c + a - b)^2 + c(a + b - c)^2 \geq 3abc$$

[1] Soal-soal ini bukanlah buatan penulis. Soal ini merupakan soal latihan yang penulis kerjakan di buku tersebut