Diskriminan

Romano Emmanuelle

6 Mei 2020

Revisi ke-1

Diskriminan... Keberadaannya telah kita pelajari di kelas 10 pada topik persamaan kuadrat. Sedikit kilas balik,

solusi umum dari $ax^2 + bx + c = 0$ adalah

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nilai $b^2 - 4ac$ disebut juga dengan diskriminan (D). Kita dapat memperoleh sifat dari solusi yang kita miliki lewat diskriminan karena diskriminan terletak di bawah akar. Secara intuisi kita dapat mengambil kesimpulan bahwa solusi terdefinisi akan didapatkan saat nilai akar bersifat riil. Dengan kata lain, $D \geq 0$.

Dalam Olimpiade, nilai diskriminan dapat membantu kita mencari nilai minimum sebuah persamaan kuadrat. Perhatikanlah contoh di bawah ini!

Untuk setiap bilangan riil x, tentukanlah nilai minimum dari

$$6 - \frac{2020}{x^2 + 2x + 2021}$$

Kita akan mencari nilai terkecil yang memungkinkan untuk setiap bilangan riil x. Dapat dengan mudah kita ketahui bahwa ekspresi di atas akan menyentuh nilai minimum ketika

$$\frac{2020}{x^2 + 2x + 2021}$$

menyentuh nilai maksimum, dengan kata lain kita akan membuat nilai $x^2 + 2x + 2021$ minimum agar nilai pecahan ini dapat menjadi sebesar mungkin. Misalkan $x^2+2x+2021 = y$ atau $x^2+2x+2021-y = 0$. Dengan memandang ekspresi ini sebagai persamaan kuadrat dengan variabel x, kita memiliki $a = 1, b = 2, c = 2021 - y$. Dari sinilah diskriminan dipakai:

$$D \geq 0$$
$$b^2 - 4ac \geq 0$$
$$(2)^2 - 4(1)(2021 - y) \geq 0 \iff y \geq 2020.$$

Terlihat $x^2 + 2x + 2021$ menyentuh nilai minimum pada 2020. Mensubtitusi nilai ini pada ekspresi awal akan memberikan nilai minimum 5 sebagai jawaban akhir.

Terkadang, kehadiran diskriminan tidak dapat kita duga. Dengan kata lain, jangan pernah ragu untuk berpikir di luar kotak[1] (out of the box) dalam menggunakan diskriminan :

Carilah solusi bulat (x, y) yang memenuhi persamaan

$$x^3 + y^3 = (x + y)^2.$$

Dapat dengan mudah dilihat semua pasangan $(n, -n)$ untuk setiap bilangan bulat n memenuhi solusi persaman.
Jika $x + y \neq 0$. Persamaannya menjadi

$$x^2 - xy + y^2 = x + y$$

atau

$$x^2 - (y + 1)x + (y^2 - y) = 0$$

Kita memiliki persamaan kuadrat dalam bentuk x, sehingga nilai diskriminannya dapat dihitung:

$$\begin{aligned} D &\geq 0 \\ b^2 - 4ac &\geq 0 \\ (-(y + 1))^2 - 4(1)(y^2 - y) &\geq 0 \\ -3y^2 + 6y + 1 &\geq 0 \\ \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3} \geq y &\geq \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Maka nilai y yang memungkinkan adalah $0, 1$ dan 2, yang mana memberikan solusi $(1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 1)$ dan $(2, 2)$.
Jadi, pasangan solusi bulat (x, y) yang memenuhi persamaan adalah $(x, y) = (1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$, dan $(n, -n)$ untuk setiap bilangan bulat n.

Jika $\frac{3}{4} < a < 1$. Buktikan persamaan

$$x^3(x + 1) = (x + a)(2x + a)$$

memiliki 4 solusi riil berbeda dan nyatakan solusinya dalam bentuk a.

Korean Mathematics Competition 2000

[1] absurd juga ya penerjemahannya

Dengan menjabarkan persamaan yang ada, kita memiliki

$$a^2 + 3xa + 2x^2 - x^3 - x^4 = 0$$

Kita dapat menyatakan persamaan kuadrat dalam bentuk a

$$a^2 + (3x)a + (-x^3 - x^4) = 0$$

yang mana memiliki diskriminan $(x + 2x^2)^2$, maka

$$a = \frac{-3x \pm (x + 2x^2)}{2}$$

Salah satu solusi $a = -x + x^2$ memberikan $x^2 - x + a = 0$ yang mana memiliki solusi

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

Solusi lain nya $a = -2x - x^2$ memberikan $x^2 + 2x + a = 0$ yang mana memiliki solusi

$$x = -1 \pm \sqrt{1 - a}$$

. Akhirnya, pertidaksamaan

$$-1 - \sqrt{1 - a} \leq -1 + 1 - a \leq \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2} \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

menunjukkan terdapat 4 solusi berbeda.

Untuk x, y bilangan riil tak nol, jumlah nilai minimum dan maksimum

$$\frac{xy - 4y^2}{x^2 + 4y^2}$$

adalah...

OSP 2018

Membagi pembilang dan penyebut dengan y^2 memberikan bentuk

$$\frac{\frac{x}{y} - 4\frac{y}{x}}{\frac{x}{y} + 4\frac{y}{x}}$$

Kita dapat misalkan bentuk ini sebagai k dan $\frac{x}{y} = t$

$$k = \frac{t - 4}{t^2 + 4}$$

atau

$$kt^2 - t + (4k + 4) = 0$$

Tinjau diskriminan dalam persamaan bentuk t

$$(-1)^2 - 4(k)(4 + 4k) \geq 0$$

yang memiliki solusi

$$\frac{-2 - \sqrt{5}}{4} \leq k \leq \frac{-2 + \sqrt{5}}{4}$$

sehingga nilai minimum dan maksimum adalah

$$\frac{-2 - \sqrt{5}}{4} + \frac{-2 + \sqrt{5}}{4} = -1$$

Latihan Mandiri

1. Carilah nilai minimum dari
$$f(x) = \frac{8}{1+\cos x} + \frac{18}{1-\cos x}$$
untuk x bilangan riil sedemikian sehingga $f(x)$ terdefinisi.

SEAMO 2019 F

2. a, b, c adalah bilangan positif yang memenuhi persamaan
$$c^2x^2 + (a^2 - b^2 - c^2)x + b^2 = 0$$
tidak memiliki akar riil. Buktikan bahwa terdapat segitiga dengan sisi a, b, c.

3. Diberikfgan bilangan riil x dan y yang memenuhi $\frac{1}{2} < \frac{x}{y} < 2$. Nilai minimum
$$\frac{x}{2y-x} + \frac{2y}{2x-y}$$
adalah...

OSK 2018

4. a, b, c adalah bilangan riil dengan $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.Tentukan sifat akar dari persamaan
$$x^2 + (a+b+c)x + (a^2 + b^2 + c^2) = 0$$

China 1997

5. Misalkan $P_i(x) = x^2 + b_ix + c_i; i = 1, 2, ..., n$ merupakan pasangan polinom berbeda yang memiliki derajat 2 sehingga untuk setiap $1 \leq i < j \leq n$ polinom
$$P_{ij} = P_i(x) + P_j(x)$$
hanya memiliki satu akar riil. Carilah nilai maksimum n.

Bilkent University POTM