Solusi Ujian Tulis Beasiswa MEXT
Gakubu - Mathematics B 2019

Romano Emmanuelle

9 Juli 2024

1. Fill in the blanks with the correct expressions/numbers.

(1) The total number of positive divisors of 2019 is . . . , and the whole sum of those divisors is . . . .

Solusi. Perhatikan bahwa $2019 = 3 \times 673$ sehingga pembagi positif dari 2019 adalah elemen-elemen dari himpunan $\{1, 3, 673, 2019\}$. Dengan demikian, terdapat $\boxed{4}$ pembagi positif dari 2019. Jumlah dari pembagi positif ini adalah $1 + 3 + 673 + 2019 = \boxed{2696}$. △

---

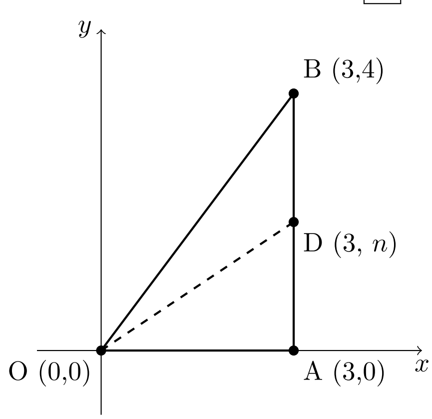
(2) For the three points O$(0, 0)$, A$(3, 0)$, and B$(3, 4)$ on the xy-plane, the equation of the angle bisector of ∠AOB is $y = \ldots x$.

Solusi. Misalkan persamaan garis yang dimaksud adalah $g : y = kx$. Garis g memotong AB di titik D. Terlebih lagi, garis g merupakan *angle bisector* (yakni, garis yang membagi sudut menjadi dua, sama besar, yakni $\angle AOD = \angle BOD$).

Misalkan $AD = n$ sehingga $BD = 4 - n$. *Angle bisector theorem* memberikan kita

$$\frac{OA}{AD} = \frac{OB}{BD} \Rightarrow \frac{3}{n} = \frac{5}{4-n} \text{ sehingga } n = \frac{3}{2}.$$

Selanjutnya, didapat $k = \Delta y/\Delta x = n/OA = \frac{1}{2}$ sehingga $y = \boxed{\frac{1}{2}}x$.



△

Komentar: *(Angle Bisector Theorem) Diberikan segitiga $\triangle ABC$ dan garis bagi AD, di mana D terletak pada sisi BC, maka*

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}.$$

Proof. Dengan menggunakan aturan sinus pada $\angle ACD$ dan $\angle ABD$, kita dapat menulis:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{\sin(\angle BDA)}{\sin(\angle BAD)},$$
$$\frac{AC}{CD} = \frac{\sin(\angle CDA)}{\sin(\angle CAD)}.$$

Dengan memerhatikan fakta bahwa $\overline{AD}$ adalah garis bagi, $\angle BDA + \angle CDA = \pi$, dan $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$, kita memiliki $\sin(\angle BAD) = \sin(\angle CAD)$ dan $\sin(\angle BDA) = \sin(\angle CDA)$ sehingga

$$\frac{AB}{BD} = \frac{\sin(\angle BDA)}{\sin(\angle BAD)} = \frac{AC}{CD}.$$

△

---

(3) For parabola $y = x^2$ and two points $(-1, 1)$ and $(3, 9)$ on it, its tangent line parallel to the line through the two points is the line $y = \ldots x + \ldots$, whose point of tangency is the point $(\ldots, \ldots)$.

Solusi. Misalkan **l** sebagai garis yang dilewati oleh titik $(-1, 1)$ dan titik $(3, 9)$. Garis **l** memiliki gradien $\dfrac{9-1}{3-(-1)} = 2$. Di lain sisi, kita memerlukan sebuah nilai x dari parabola $y = x^2$ sedemikian sehingga gradien garis singgung parabola tersebut bernilai 2 juga:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x^2)' = 2x.$$

Perhatikan bahwa

$$\text{gradien garis singgung parabola} = 2 \iff \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2 \iff 2x = 2 \iff x = 1.$$

Subtitusi nilai $x = 1$ ke parabola $y = x^2$ sehingga kita mendapatkan titik $(x, y) = \boxed{(1, 1)}$. Ini adalah *point of tangency* yang dimaksud (titik singgung) pada soal. Misalkan **k** sebagai persamaan garis yang harus dicari. Jelas bahwa nilai **k** merupakan persamaan garis dalam bentuk $y = 2x + c$. Subtitusi $(x, y) = (1, 1)$ akan memberikan kita nilai $c = -1$. Dengan demikian, persamaan garis **k** adalah $\boxed{y = 2x - 1}$ △

Komentar: *Pertama kali membaca soal, penulis dibuat cukup bingung dengan wording soalnya. Jika Anda mengalami hal yang sama, simaklah parafrase soal di bawah ini!*

Given a parabola $g : y = x^2$ and two points $(-1, 1)$ and $(3, 9)$ on g. Let l be a straight line that pass throught $(-1, 1)$ and $(3, 9)$. The tangent line parallel to l is $y = ...x + ...$, whose point of tangency is the point $(..., ...)$.

Komentar: *Soal ini dapat diselesaikan tanpa menggunakan turunan. Setelah mengetahui gradien l (yakni 2), persamaan garis l adalah $y = 2x + c$. Perhatikan bahwa l bersinggungan dengan $y = x^2$ sehingga*

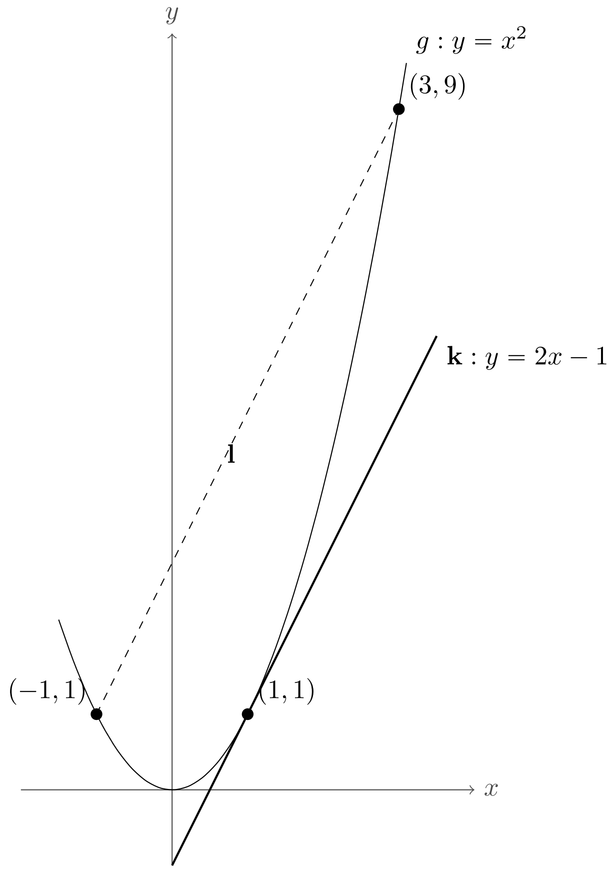
$$x^2 = y = 2x + c$$

membentuk persamaan kuadrat $x^2 - 2x - c = 0$. Untuk mendapatkan nilai c, kita akan mengambil D (determinan) $= 0$ (why?):

$$(-2)^2 - 4(1)(-c) = 0 \Longrightarrow c = -1,$$

sesuai dengan solusi awal.

Komentar: *Ilustrasi soal ini adalah sebagai berikut:*



---

(4) When the line $y = m(x - 5) + 3$ intersects the circle $x^2 + y^2 = r^2$ $(r > 0)$ if and only if $0 \leqslant m \leqslant \ldots, r = \ldots$.

Solusi. Garis $y = m(x - 5) + 3$ dapat ditulis sebagai $mx - y - 5m + 3 = 0$. Agar garis ini memotong lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$, jarak pusat lingkaran $(0, 0)$ ke garis harus tidak lebih dari r, yaitu

$$\frac{|3 - 5m|}{\sqrt{m^2 + 1}} \leqslant r.$$

Karena intervalnya dimulai dari $m = 0$, maka garis $y = 3$ menjadi garis singgung, sehingga $r = \boxed{3}$.

Maka

$$\frac{|3 - 5m|}{\sqrt{m^2 + 1}} \leqslant 3.$$

Karena $m \geqslant 0$, diperoleh

$$0 \leqslant m \leqslant \boxed{\frac{15}{8}}.$$

△

---

(5) When $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$, the maximum of $\sin x + \cos x$ is $\ldots$, and the minimum of that is $\ldots$

Solusi. Perhatikan bahwa $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$. Misalkan $y = \sin x + \cos x$:

$$y = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) = \frac{2}{\sqrt{2}} (\cos(\pi/4) \sin x + \sin(\pi/4) \cos x) = \sqrt{2} \left(\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right).$$

Pada interval $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$, nilai maksimum $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ adalah 1, nilai maksimumnya tercapai saat $x = \frac{\pi}{4}$. Akibatnya, maksimum y adalah $\boxed{\sqrt{2}}$.

Di sisi lain, nilai minimumnya dicapai saat $x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$, yaitu $x = -\frac{\pi}{2}$. Maka nilai minimum y adalah

$$\sqrt{2} \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \boxed{-1}.$$

△

Komentar: *Diketahui bahwa* $|\sin x| \leqslant 1$ *untuk setiap* $x \in \mathbb{R}$ *sehingga* $|y| \leqslant \sqrt{2}$. *Namun, kesalahan umum pelajar adalah mengambil* $-\sqrt{2}$ *sebagai nilai minimum* y*!*

Komentar: *Pada umumnya, dalam menyelesaikan soal nilai maksimum dan minimum, tidak cukup hanya menentukan nilai maksimum atau minimumnya saja. Kita juga perlu menunjukkan bahwa terdapat nilai* x *tertentu yang benar-benar menghasilkan nilai maksimum atau minimum tersebut!*

---

(6) By $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ and $\log_{10} 3 \approx 0.4771$, the number of digits of 6^{100} is $\ldots$, and its leading digit is $\ldots$.

Solusi. Perhatikan bahwa

$$\log_{10} 6^{100} = 100 \log_{10} 6 = 100(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) = 100(0.3010 + 0.4771) = 77.81.$$

Karena $77 < \log_{10} 6^{100} < 78$, maka $10^{77} < 6^{100} < 10^{78}$. Jadi banyak digit dari 6^{100} adalah $77 + 1 = \boxed{78}$ (mengapa demikian?).

Selanjutnya,

$$6^{100} = 10^{77.81} = 10^{77} \cdot 10^{0.81}.$$

Karena $\log_{10} 6 \simeq 0.7781$ dan $\log_{10} 7 < \log_{10} 8 = 3 \log_{10} 2 \simeq 0.9030$, diperoleh

$$\log_{10} 6 < 0.81 < \log_{10} 7.$$

Maka $6 < 10^{0.81} < 7$. Jadi digit pertama dari 6^{100} adalah $\boxed{6}$. △

Komentar: *Dalam mengerjakan soal yang berkaitan dengan banyaknya digit atau digit pertama suatu bilangan besar, salah satu trik yang cukup berguna adalah mengambil logaritma.*

---

2. Let $I(m,n)$ be a function of a pair (m,n) of natural numbers that is inductively defined by the following:

(i) $I(m,1) = I(1,n) = 1$ (for any (m,n));

(ii) $I(m+1,n) + I(m,n+1) = I(m+1,n+1)$ (for any (m,n)).

Answer the following questions.

(1) Express $I(2,n)$ and $I(3,n)$ in terms of n.

(2) Find the value of $I(5,3)$.

Solusi.

(1) Kita akan menyatakan $I(2,n)$ dalam bentuk n. Ambil $m=1$ dan $n=k$ pada item (ii):

$$I(2,k) + I(1,k+1) = I(2,k+1). \tag{1}$$

Perhatikan bahwa $I(1,n) = 1$ untuk setiap bilangan asli n sehingga $I(1,k+1)$ **juga** bernilai 1:

$$I(2,k+1) - I(2,k) = 1. \tag{2}$$

Ambil nilai $k = 1, 2, \ldots, n-2, n-1$ pada persamaan (2) sehingga kita memiliki

$$\begin{aligned} I(2,2) - I(2,1) &= 1; \\ I(2,3) - I(2,2) &= 1; \\ &\vdots \\ I(2,n-1) - I(2,n-2) &= 1; \\ I(2,n) - I(2,n-1) &= 1. \end{aligned}$$

Menjumlahkan persamaan-persamaan di atas akan memberikan

$$I(2,n) - I(2,1) = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n-1 \text{ buah angka } 1}.$$

Dengan demikian, item (i) mengakibatkan $I(2,1) = 1$ sehingga

$$I(2,n) = 1 \times (n-1) + 1 = \boxed{n}.$$

Selanjutnya, kita akan menyatakan $I(3,n)$ dalam bentuk n. Ambil $m=2$ dan $n=k$ pada persamaan (ii):

$$I(3,k) + I(2,k+1) = I(3,k+1). \tag{3}$$

Perhatikan bahwa $I(2,n) = n$ untuk setiap bilangan asli n sehingga $I(2,k+1)$ bernilai $k+1$:

$$I(3,k+1) - I(3,k) = k+1. \tag{4}$$

Ambil nilai $k = 1, 2, \ldots, n-2, n-1$ pada persamaan (4) sehingga kita memiliki

$$\begin{aligned} I(3,2) - I(3,1) &= 2; \\ I(3,3) - I(3,2) &= 3; \\ &\vdots \\ I(3,n-1) - I(3,n-2) &= n-1; \\ I(3,n) - I(3,n-1) &= n. \end{aligned}$$

Menjumlahkan persamaan-persamaan di atas akan memberikan

$$I(3,n) - I(3,1) = 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1)$$

Dengan demikian, item (i) mengakibatkan $I(3,1) = 1$ sehingga

$$I(3,n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

(2) Selanjutnya, kita akan mencari nilai dari $I(5,3)$. Dengan cara yang sama, ambil $m = 3$ dan $n = k$ pada item (ii):

$$I(3, k+1) + I(4, n) = I(4, k+1).$$

Perhatikan bahwa $I(3,n) = \frac{1}{2}n(n+1)$ untuk setiap bilangan asli n sehingga $I(3, k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$:

$$I(4, k+1) - I(4, k) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2). \tag{5}$$

Ambil $k = 1, 2, \ldots, n-2, n-1$ dan melakukan hal yang sama seperti mencari $I(3,n)$ akan menghasilkan

$$I(4,n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}k(k+1). \tag{6}$$

Akhirnya, untuk menemukan $I(5,3)$, ambil $m = 4$ dan $n = 1, 2$ pada persamaan item (ii)

$$I(5,1) + I(4,2) = I(5,2)$$
$$I(5,2) + I(4,3) = I(5,3).$$

Dengan persamaan (6), kita memperoleh

$$I(5,3) = I(4,3) + I(5,1) + I(4,2) = 10 + 1 + 4 = \boxed{15}.$$

△

Komentar: *Jika Anda telah mengetahui cara mendapatkan $I(2,n)$, mendapatkan $I(3,n)$ dan $I(5,3)$ seharusnya bukanlah hal yang sulit. Pembuat soal dapat meningkatkan kesulitan dengan menanyakan bentuk umum $I(m,n)$.*

Komentar: *$I(m,n)$ dapat dinyatakan dalam bentuk*

$$\binom{m+n-2}{m-1}.$$

Proof. Kita akan menggunakan induksi matematika.

(a) Pertama-tama, untuk $m = 1$ atau $n = 1$, jelas bahwa $I(1,1) = 1$.
Pada tahap ini, diasumsikan bahwa

$$I(m,1) = 1 \quad \text{dan} \quad I(1,n) = 1 \quad \text{untuk semua } m, n.$$

(b) Selanjutnya, asumsikan

$$I(m,k) = \binom{m+k-2}{m-1} \text{ untuk semua } k \leqslant n$$

benar.

(c) Akhirnya, untuk $k = n+1$,

$$I(m, n+1) = I(m,n) + I(m-1, n+1) = \binom{m+n-2}{m-1} + \binom{m+n-2}{m-2} = \binom{m+n-1}{m-1},$$

sesuai dengan yang kita harapkan.

△

3. Let $f(x) = e^x$, $g(x) = 1 + x$, and $h(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2$. Fill in the blanks with the answers to the following questions.

(1) When $x < 0$, arrange $f'(x)$, $g'(x)$, and $h'(x)$ in ascending order.

(2) When $x < 0$, arrange $f(x)$, $g(x)$, and $h(x)$ in ascending order.

(3) Compute

$$I_1 = \int_{-1}^{0} |f(x) - g(x)|\, dx \qquad \text{and} \qquad I_2 = \int_{-1}^{0} |f(x) - h(x)|\, dx.$$

Solusi.

(1) Kita memiliki $f'(x) = e^x$, $g'(x) = 1$, dan $h'(x) = 1 + x$. Untuk $x < 0$, berlaku $1 + x < e^x < 1$. Maka $h'(x) < f'(x) < g'(x)$. Jadi urutan naiknya adalah $\boxed{h'(x),\ f'(x),\ g'(x)}$.

(2) Selanjutnya, untuk $x < 0$, berlaku $1+x < e^x < 1+x+\frac{1}{2}x^2$. Dengan kata lain, $g(x) < f(x) < h(x)$. Jadi urutan naiknya adalah $\boxed{g(x),\ f(x),\ h(x)}$.

(3) Perhatikan bahwa pada $[-1, 0]$ berlaku $g(x) \leqslant f(x)$, maka $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$. Jadi

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^{0} \{e^x - (1 + x)\}\, dx \\ &= \left[e^x - x - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^{0} \\ &= \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{e}}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa pada $[-1, 0]$ berlaku $f(x) \leqslant h(x)$, maka $|f(x) - h(x)| = h(x) - f(x)$. Jadi

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-1}^{0} \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 - e^x \right) dx \\ &= \left[x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - e^x \right]_{-1}^{0} \\ &= \boxed{\frac{1}{e} - \frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

△

Komentar: *Kesalahan umum pelajar adalah kegagalan untuk membongkar definisi dari* $|f(x) - g(x)|$ *maupun* $|f(x) - h(x)|$.